ද්විපද ප්‍රසාරණය

විසඳූ අභ්‍යාස

Ruwan Darshana
B.Sc. (Hons)

ගැටළු - 01

01. (i) $\left(kx^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{24}$ ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදය සොයන්න.

(ii) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x^3}\right)^{5}$ ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදය සොයන්න.

(iii) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{9}$ ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදය සොයන්න.

(iv) $\left(kx + \dfrac{1}{x}\right)^{m}$ ප්‍රසාරණයේ 4 වන පදය 540 ක් වේ. m සහ k සොයන්න.

(v) $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{6}$ ප්‍රසාරණයේ 5 වන පදය සොයන්න.

(vi) $\left(3x^2 - \dfrac{1}{2x^3}\right)^{12}$ ප්‍රසාරණයේ මැද පදය සොයන්න.

(vii) $(1 - 2x)^{4n}$ ප්‍රසාරණයේ මැද පදය සොයන්න.

පිළිතුරු - 01

01. (i)

$$T_{r+1} = {}^{24}C_r\,(kx^2)^{24-r}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^r$$
$$= {}^{24}C_r\, k^{24-r}(-1)^r x^{48-2r}x^{-2r}$$
$$= {}^{24}C_r\, k^{24-r}(-1)^r x^{48-4r}$$

x වලින් ස්වායත්ත විට $48 - 4r = 0$

$r = 12$

13 වන පදය x වලින් ස්වායත්ත වේ.

$T_{13} = {}^{24}C_{12}\, k^{12}$ //

$k = 4$ විට $T_{13} = {}^{24}C_{12}\, 4^{12}$ //

(ii)

$$T_{r+1} = {}^{5}C_r\,(2x^2)^{5-r}\left(\frac{-3}{x^3}\right)^r$$
$$= {}^{5}C_r\, 2^{5-r}x^{10-2r}(-3)^r x^{-3r}$$
$$= {}^{5}C_r\, 2^{5-r}(-3)^r x^{10-5r}$$

x වලින් ස්වායත්ත පදය $10 - 5r = 0$ විට ලැබේ.

$r = 2$

3 වන පදය x වලින් ස්වායත්ත වේ.

$$T_3 = {}^{5}C_2\, 2^3(-3)^2 = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 3\ \lfloor 2} \times 8 \times 9$$
$$= \frac{4.5}{1.2} \times 72 = 720 \,//$$

(iii)

$$T_{r+1} = {}^{9}C_r\,(x^2)^{9-r}\left(\frac{-1}{x}\right)^r$$
$$= {}^{9}C_r\,(-1)^r x^{18-2r}x^{-r}$$
$$= {}^{9}C_r\,(-1)^r x^{18-3r}$$

$18 - 3r = 0$ විට x වලින් ස්වායත්ත පදය r ලැබේ.

$\therefore 18 = 3r \Rightarrow r = 6$

7 වන පදය x වලින් ස්වායත්ත වේ.

$T_7 = {}^{9}C_6\,(-1)^6$

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor 9-6\ \lfloor 6} = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 3\ \lfloor 6} = \frac{7.8.9}{1.2.3} = 84 \,//$$

(iv) ප්‍රසාරණයේ 4 වන පදය T_4 ලෙස ගන්න.

$$T_4 = {}^mC_3\ (kx)^{m-3} \left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\frac{\lfloor m}{\lfloor m-3 \lfloor 3} \times k^{m-3}\ x^{m-3} \times x^{-3}$$

$$= \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3} \times k^{m-3}\ x^{m-6}$$

$T_4 = 540$ බව දී ඇත. එවිට x හි බලය ශූන්‍ය වේ.

$m - 6 = 0 \quad \therefore\ m = 6$

$$540 = \frac{6\,(6-1)\,(6-2)}{6}\ k^{6-3}$$

$$k^3 = \frac{540}{5 \times 4} \qquad \therefore\ k = 3$$

(v) $\left(2x^2 + \left(\frac{-1}{x}\right)\right)^6$

$$T_{r+1} = {}^6C_r\ (2x^2)^{6-r} \left(\frac{-1}{x}\right)^r$$

$$T_{r+1} = {}^6C_r\ 2^{6-r}\ (-1)^r\ x^{12-3r}$$

5 වන පදය ලැබීමට, $r = 4$ විය යුතුය.

$$T_5 = {}^6C_4\ 2^2\ (-1)^4\ x^0$$

$$= {}^6C_4 . 4 = \frac{6!}{4!\ 2!} \times 4 = 60$$

(vi) $\left(3x^2 + \left(\frac{-1}{2x^3}\right)\right)^{12}$

මැද පදය $T_{\frac{12}{2}} + 1 = T_7$

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\ (3x^2)^{12-r} \left(\frac{-1}{2x^3}\right)^r$$

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r\ 3x^{12-r} \left(\frac{-1}{2}\right)^r x^{24-5r}$$

T_7 ලැබීමට $x = 6$ විය යුතුය.

$$T_7 = {}^{12}C_r\ 3^6 \left(\frac{-1}{2}\right)\ 6.x^{-4}$$

(vii) ප්‍රසාරණයේ බලය ඉරට්ටේ වේ. පද ගණන ඔත්තේ වේ.

$$\text{මැද පදය} = \frac{4n}{2} + 1 = 2n + 1$$

$$T_{2n+1} = {}^{4n}C_{2n}\ (-2x)^{2n}$$

$$= \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 4n-2n\ \lfloor 2n}\ 2^{2n}\ x^{2n} = \frac{\lfloor 4n}{(\lfloor 2n)^2}\ 2^{2n}\ x^{2n}$$

$$= \frac{\lfloor 4n}{(\lfloor 2n)^2}\ .\ 2^{2n}\ .\ x^{2n}$$

ගැටළු - 02

01. $(1 + x)^n$ ප්‍රසාරණයේ x^{r-1}, x^r , x^{r+1} වල සංගුණක සමාන්තර ශ්‍රේණියක වේ නම්, $n^2 - n\,(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින් x^4 , x^5 , x^6 පදවල සංගුණක සමාන්තර ශ්‍රේණියක වේ නම් n හි පිළිතුරු දෙක ලබාගන්න.

02. $(1 + 2x)^n$ ප්‍රසාරණයේ 2 වන සහ 3 වන පද පිළිවෙලින් $5\sqrt{2}$ සහ 20 වේ. ප්‍රසාරණය සොයන්න.

පිළිතුරු - 02

01. $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x + \ .... + {}^nC_1 x^r + \ .... + {}^nC_n x^n$

x^{r-1} , x^r , x^{r+1} හි සංගුණක පිළිවෙලින් ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$ වේ.

ඒවා සමාන්තර ශ්‍රේණියක නිසා පොදු අන්තර සමාන වේ.

$${}^nC_r - {}^nC_{r-1} = {}^nC_{r+1} - {}^nC_r$$

$$2\ {}^nC_r = {}^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1}$$

${}^nC_r$ වලින් බෙදීමෙන්, $2 = \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} + \frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r}$

$$2 = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r-1\,\lfloor r+1} \times \frac{\lfloor n-r\,\lfloor r}{\lfloor n} + \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r+1\,\lfloor r-1} \times \frac{\lfloor n-r\,\lfloor r}{\lfloor n}$$

$$2 = \frac{n-r}{r+1} + \frac{r}{n-r+1}$$

$$= \frac{(n-r)(n-r+1) + r(r+1)}{(r+1)(n-r+1)}$$

$$2[nr - r^2 + r + n - r + 1] = n^2 - nr + n - rn + r^2 - r + r^2 + r$$

$$2nr - 2r^2 + 2n + 2 = n^2 - 2nr + 2r^2 + n$$

$$n^2 - 4nr - n + 4r^2 + 2 = 0$$

$$n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0 \;//$$

පද තුනට x^4, x^5, x^6 ඇතුලත් වේ.

$\therefore$ r = 5 වේ. $n^2 - 21n + 98 = 0$

$$n^2 - 21n + 98 = 0$$

$$(n-14)(n-7) = 0$$

$$n = 14,\ n = 7 \;//$$

02. $(1+2x)^n$ හි $T_2 = {}^nC_1(2x) = 2nx$

$$T_2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow 2nx = 5\sqrt{2} \text{ ——— } (1)$$

$$T_3 = {}^nC_2(2x)^2 = \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\, 4x^2$$

$$2n(n-1)x^2 = 20 \text{ ——— } (2)$$

$(2) / (1)^2$,

$$\frac{2n(n-1)x^2}{4n^2x^2} = \frac{20}{50} \Rightarrow \frac{(n-1)}{2n} = \frac{2}{5}$$

$$5n - 5 = 4n \Rightarrow n = 5$$

(1) න්, $2\ 5x = 5\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ප්‍රසාරණය $= (1+\sqrt{2})^5 \;//$

ගැටළු - 03

01. $(1+2x)^4$ ප්‍රසාරණයේ විශාලතම සංගුණකය සොයන්න.

02. $(4+3x)^4$ ප්‍රසාරණයේ $x = 1$ විට විශාලතම පදය සොයන්න.

03. $(2-3x)^5$ ප්‍රසාරණයේ $x = \frac{2}{3}$ විට සංඛ්‍යාත්මක විශාලතම පදය සොයන්න.

04. $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{23}$ ප්‍රසාරණයේ සංඛ්‍යාත්මක විශාලතම සංගුණකය සොයන්න.

පිළිතුරු - 03

01. $T_{r+1} = {}^4C_r(2x)^r = {}^4C_r\, 2^r\, x^r$

සංගුණකය $T_{r+1} \lesseqgtr$ සංගුණකය T_r යොදමු.

$${}^4C_r\, 2^r \lesseqgtr {}^4C_{r-1}\, 2^{r-1}$$

$$\frac{\cancel{4!}}{r!(4-r)}\, 2 \lesseqgtr \frac{\cancel{4!}}{(r-1)(5-r)}\, \cancel{2^{r-1}}$$

$$\frac{1}{r\,\cancel{(r-1)}\,\cancel{(4-r)}}\, 2 \lesseqgtr \frac{1}{\cancel{(r-1)}!\,(5-r)\,\cancel{(4-r)}}$$

$$2(5-r) \lesseqgtr r$$

$$10 \lesseqgtr 3r$$

$$3\frac{1}{3} \lesseqgtr r$$

(1) $3\frac{1}{3} > r$ විට (r = 3 , 2 , 1 , ...)

සංගුණකය $T_{r+1} >$ සංගුණකය T_r

r = 3 ; සංගුණකය $T_4 >$ සංගුණකය T_3

r = 2 ; සංගුණකය $T_3 >$ සංගුණකය T_2

r = 1 ; සංගුණකය $T_2 >$ සංගුණකය T_1

r = 4 ; සංගුණකය $T_3 >$ සංගුණකය T_2 ——— (I)

(2) $3\frac{1}{3} = r$ විට

($\therefore$ r පූර්ණ)

02. (I) $2\frac{1}{7} > r$ විට $\{r = 2, 1\}$

$T_{r+1} > T_r$

$r = 2;\ T_3 > T_2$ ——(I)

(II) $2\frac{1}{7} = r$ විට ——(II)

(III) $2\frac{1}{7} < r$ විට $\{r = 3, 4, ...\}$

$T_{r+1} < T_r$

$r = 3;\ T_4 < T_3$ ——(III)

(I), (II) හා (III) න්,

$T_4 < T_3 > T_2$

$\therefore$ විශාලම පදය $= T_3$

03. $(2 - 3x)^5 = \big(2 + (-3x)\big)^5$

$T_{r+1} = 5_{cr}\ 2^{5-r}(-3x)^r$

$|T_{r+1}| \lesseqgtr |T_r|$ යොදමු.

$|5_{cr}\ 2^{5-r}(-3x)^r| \gtreqless |5_{cr-1}\ 2|$

$\left|\frac{\cancel{5!}}{r!(5-r)}\right| |(-3x)| \gtreqless \left|\frac{\cancel{5!}}{(r-1)(6-r)}\right| 2$

$\left|\frac{1}{r}(-3x)\right| \gtreqless \left|\frac{2}{(6-r)}\right|$

$x = \frac{2}{3}$ විට, $\left|\frac{-2}{r}\right| \gtreqless \left|\frac{2}{(6-r)}\right|$

$3\frac{1}{3} < r$ විට $(r = 4, 5, ...)$

සංගුණකය $T_{r+1} <$ සංගුණකය T_r

$r = 4;$ සංගුණකය $T_5 <$ සංගුණකය T_4

$r = 5;$ සංගුණකය $T_6 <$ සංගුණකය T_5

$\therefore T_6 <$ සංගුණකය $T_5 <$ සංගුණකය T_4 ——(III)

(I), (II), (III) ට අනුව,

..... < සංගුණකය T_5 < සංගුණකය T_4 < සංගුණකය T_3 .....

$\therefore$ විශාලතම සංගුණකය $= T_4$

$= {}^4C_3\ 2^3$

04. $(4 + 3x)^4$

$T_{r+1} = {}^4C_r 4^{4-r}(3x)^r$

$T_{r+1} \gtreqless T_r$ යොදමු.

${}^4C_r \cancel{4^{4-r}}(3x)^r \gtreqless {}^4C_{r-1}\cancel{4^{5-r}}\cancel{(3x)^{r-1}}$

$\frac{\cancel{4!}}{r!(4-r)!}3x \gtreqless \frac{\cancel{4!}}{(r-1)!(5-r)!}4$

$\frac{1}{r}3x \gtreqless \frac{4}{(5-r)}$

$x = 1$ විට, $\frac{3}{r} \gtreqless \frac{4}{(5-r)}$

$3(5-r) \gtreqless 4r$

$15 \gtreqless 7r$

$2\frac{1}{7} \gtreqless r$

$\frac{\cancel{2}}{r} \gtreqless \frac{\cancel{2}}{6-r}$

$6 - r \gtreqless r$

$3 \gtreqless r$

(1) $3 > r$ විට $(r = 2)$

$|T_{r+1}| > |T_r|$

$|T_3| > |T_2|$ ——(I)

(2) $3 = r$ විට

$|T_{r+1}| > |T_r|$

$|T_4| > |T_3|$ ——(II)

(3) $3 < r$ විට $(r = 4)$

$|T_{r+1}| < |T_r|$

$|T_5| < |T_4|$ ——(III)

$|T_5| < |T_4| = |T_3| > |T_2|$

$\therefore$ විශාලතම පදය $= (T_4)$ හෝ (T_3)